Présentation des suites et récurrence

Exercice 1

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 7$,
$$n! > 3^n$$
2. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n!}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 2

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_0 = 2 \qquad v_0 = -1$$
et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. On pose pour tout entier naturel n,
$$w_n = u_n - v_n$$
   (a) Vérifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme w_0 et la raison q.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n.
   (c) Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. On pose pour tout entier naturel n,
$$t_n = u_n + 2\,v_n$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $t_n = 0$.
5. (a) Déduire des questions 2(b) et 4, les formules explicites de u_n et v_n en fonction de n.
   (b) Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
6. (a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   (b) Déterminer
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1\,; \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}\,u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 en donnant chaque résultat sous forme de fraction irréductible.
2. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}\,u_n \qquad \text{et} \qquad b_n = 2^n\,u_n$$

   (a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0.
   Exprimer a_n en fonction de n.

   (b) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0.
   Exprimer b_n en fonction de n.

   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

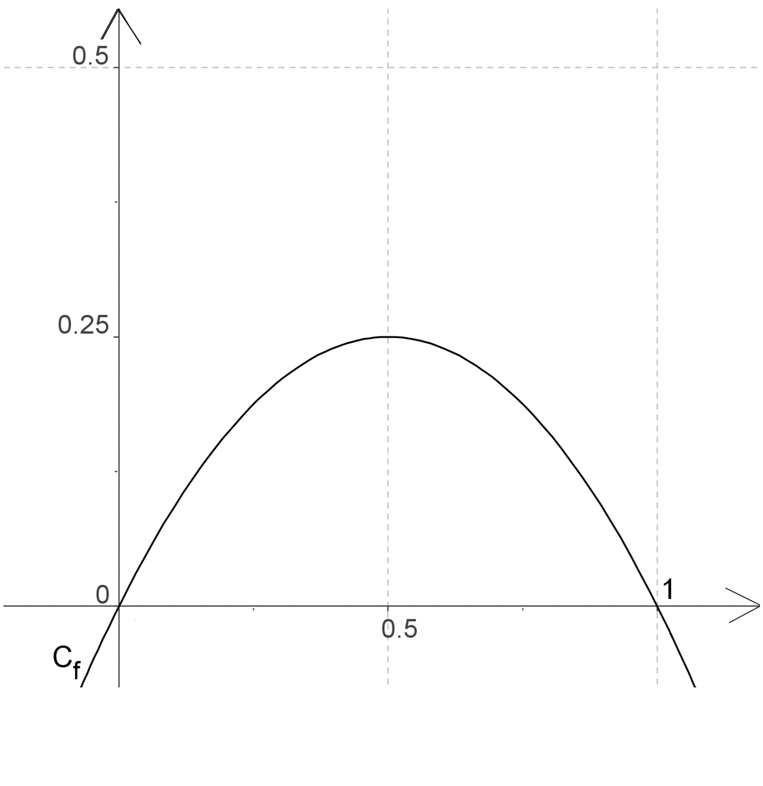
$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$$

   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{n}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x - x^2$

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous :



On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$$

1. (a) Sans effectuer de calcul, placer sur la figure, les points de l'axe (Ox) ayant pour abscisses respectives $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4
   (b) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
   (c) En utilisant la calculatrice, proposer des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près de u_{10} et u_{20}.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Prouver que pour tout entier $p \geq 1$,

$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

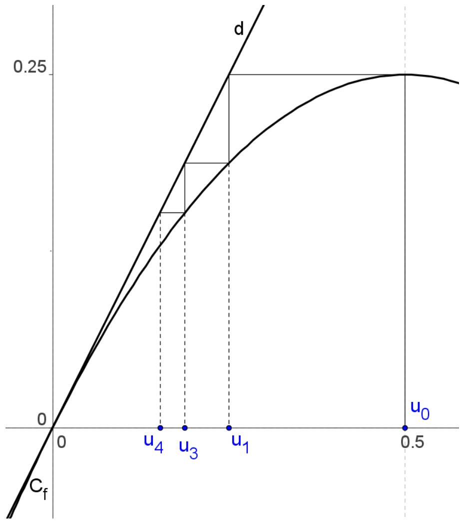
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

   On pourra utiliser la croissance de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

num-1

Exercice 5 (corrigé)

1. (a) On trace la droite d d'équation $y = x$ (appelée parfois «droite d'échange»)



(b) $u_1 = \dfrac{1}{4}$ et $u_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{16}$

(c) $u_{10} \approx 0,069$ à 10^{-3} près par défaut.
$u_{20} \approx 0,040$ à 10^{-3} près par défaut.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ est un nombre négatif.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$ ce qui signifie que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{p-1}{p^2}$
Or $\dfrac{p-1}{p^2} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(p-1)(p+1) - p^2}{p^2(p+1)} = \dfrac{-1}{p^2(p+1)}$ est négatif car $p^2(p+1) > 0$
Donc $\dfrac{p-1}{p^2} \leq \dfrac{1}{p+1}$ c.à.d. $f(1/p) \leq \dfrac{1}{p+1}$

4. • L'encadrement est vérifié au rang 1 : en effet $u_1 = \dfrac{1}{4}$ et $0 \leq \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1+1}$
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 \leq u_k \leq \dfrac{1}{k+1}$
Montrons alors sous cette hypothèse que l'encadrement est vrai au rang $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_k \leq \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{2}$ car $k+1 \geq 2$
f étant croissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $f(0) \leq f(u_k) \leq f\left(\dfrac{1}{k+1}\right)$
Or d'après 2., $f\left(\dfrac{1}{k+1}\right) \leq \dfrac{1}{(k+1)+1}$, $f(0) = 0$ et $f(u_k) = u_{k+1}$

$$\text{Donc } 0 \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{k+2}$$

• Conclusion : selon le principe de récurrence, on peut affirmer que
$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier n supérieur à 1.

5. En appliquant le théorème des gendarmes, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+}$